

This content has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text.

Download details:

IP Address: 3.133.131.87

This content was downloaded on 04/05/2024 at 20:24

Please note that [terms and conditions apply](#).

You may also like:

[Cognitive Sensors, Volume 1](#)

[Ensuring Machine and Tractor Aggregates Operability](#)

G V Redreev

[Environmental and natural resource implications of sustainable urban infrastructure systems](#)

Joseph D Bergesen, Sangwon Suh, Timothy M Baynes et al.

[Computer simulation of processes in technical systems](#)

Yu A Antokhina, V M Balashov, E G Semenova et al.

[Qualitative potentials of surface textures and coatings in the performance of fluid-film bearings:  
a critical review](#)

Nitin Sharma, Rajeev Verma, Sumit Sharma et al.

Analytical Evaluation of Uncertainty Propagation for  
Probabilistic Design Optimisation

Melanie Po-Leen Ooi, Arvind Rajan, Ye Chow Kuang and Serge Demidenko

---

## Appendix A

### Lookup table for the parameters $g$ and $h$ in Tukey's $gh$ distribution

The entries for the values of  $g$  and  $h$  in the table below satisfy their boundary conditions and were obtained using a genetic algorithm in MATLAB [1]. The symbol  $|\Omega|$  represents absolute skewness and  $K - 3$  represents excess kurtosis.

$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$	$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$	$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$	$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$
0.00	0.0	0.0000	0.0000	0.5	0.5	0.0921	0.1063	0.25	1.2	0.0411	0.1233	0.1	2.1	0.0151	0.1344
0.05	0.0	0.0091	0.1088	0.55	0.5	0.1026	0.1040	0.3	1.2	0.0496	0.1224	0.15	2.1	0.0227	0.1340
0.10	0.0	0.0183	0.1085	0.6	0.5	0.1137	0.1015	0.35	1.2	0.0583	0.1212	0.2	2.1	0.0304	0.1335
0.15	0.0	0.0275	0.1079	0.65	0.5	0.1251	0.0986	0.4	1.2	0.0672	0.1199	0.25	2.1	0.0382	0.1329
0.20	0.0	0.0370	0.1071	0.7	0.5	0.1372	0.0954	0.45	1.2	0.0763	0.1183	0.3	2.1	0.0461	0.1320
0.25	0.0	0.0464	0.1061	0	0.6	0.0000	0.0000	0.5	1.2	0.0858	0.1166	0.35	2.1	0.0541	0.1310
0.30	0.0	0.0561	0.1049	0.05	0.6	0.0086	0.1178	0.55	1.2	0.0954	0.1146	0	2.2	0.0000	0.0000
0.35	0.0	0.0660	0.1034	0.1	0.6	0.0172	0.1176	0	1.3	0.0000	0.0000	0.05	2.2	0.0075	0.1355
0.40	0.0	0.0762	0.1017	0.15	0.6	0.0258	0.1171	0.05	1.3	0.0080	0.1265	0.1	2.2	0.0150	0.1353
0.45	0.0	0.0868	0.0997	0.2	0.6	0.0346	0.1164	0.1	1.3	0.0161	0.1263	0.15	2.2	0.0226	0.1350
0.50	0.0	0.0976	0.0974	0.25	0.6	0.0435	0.1155	0.15	1.3	0.0242	0.1258	0.2	2.2	0.0302	0.1344
0.55	0.0	0.1090	0.0948	0.3	0.6	0.0525	0.1144	0.2	1.3	0.0324	0.1253	0.25	2.2	0.0379	0.1338
0.60	0.0	0.1209	0.0919	0.35	0.6	0.0618	0.1131	0.25	1.3	0.0407	0.1245	0.3	2.2	0.0458	0.1330
0.65	0.0	0.1333	0.0887	0.4	0.6	0.0712	0.1116	0.3	1.3	0.0491	0.1236	0.35	2.2	0.0537	0.1320
0.70	0.0	0.1463	0.0851	0.45	0.6	0.0810	0.1099	0.35	1.3	0.0578	0.1224	0	2.3	0.0000	0.0000
0.75	0.0	0.1602	0.0810	0.5	0.6	0.0910	0.1079	0.4	1.3	0.0666	0.1211	0.05	2.3	0.0074	0.1364
0.80	0.0	0.1748	0.0766	0.55	0.6	0.1015	0.1057	0.45	1.3	0.0756	0.1196	0.1	2.3	0.0149	0.1362
0.00	0.1	0.0000	0.0000	0.6	0.6	0.1124	0.1032	0.5	1.3	0.0850	0.1179	0.15	2.3	0.0224	0.1359
0.05	0.1	0.0090	0.1104	0.65	0.6	0.1238	0.1004	0	1.4	0.0000	0.0000	0.2	2.3	0.0300	0.1354
0.10	0.1	0.0181	0.1101	0	0.7	0.0000	0.0000	0.05	1.4	0.0080	0.1276	0.25	2.3	0.0376	0.1347
0.15	0.1	0.0272	0.1096	0.05	0.7	0.0085	0.1192	0.1	1.4	0.0160	0.1274	0.3	2.3	0.0454	0.1339
0.20	0.1	0.0365	0.1088	0.1	0.7	0.0170	0.1189	0.15	1.4	0.0240	0.1270	0	2.4	0.0000	0.0000
0.25	0.1	0.0459	0.1078	0.15	0.7	0.0256	0.1184	0.2	1.4	0.0321	0.1264	0.05	2.4	0.0074	0.1373
0.30	0.1	0.0554	0.1066	0.2	0.7	0.0342	0.1178	0.25	1.4	0.0404	0.1256	0.1	2.4	0.0148	0.1371
0.35	0.1	0.0652	0.1052	0.25	0.7	0.0430	0.1169	0.3	1.4	0.0487	0.1247	0.15	2.4	0.0222	0.1367
0.40	0.1	0.0753	0.1035	0.3	0.7	0.0520	0.1159	0.35	1.4	0.0573	0.1236	0.2	2.4	0.0297	0.1362
0.45	0.1	0.0857	0.1015	0.35	0.7	0.0612	0.1146	0.4	1.4	0.0660	0.1223	0.25	2.4	0.0374	0.1356
0.50	0.1	0.0964	0.0993	0.4	0.7	0.0705	0.1131	0.45	1.4	0.0750	0.1208	0.3	2.4	0.0451	0.1348
0.55	0.1	0.1077	0.0968	0.45	0.7	0.0801	0.1114	0.5	1.4	0.0842	0.1191	0	2.5	0.0000	0.0000

(Continued)

0.60	0.1	0.1193	0.0940	0.5	0.7	0.0901	0.1095	0	1.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.05	2.5	0.0073	0.1381
0.65	0.1	0.1316	0.0908	0.55	0.7	0.1004	0.1073	0.05	1.5	0.0079	0.1287	0.1	2.5	0.0147	0.1379	
0.70	0.1	0.1444	0.0873	0.6	0.7	0.1112	0.1048	0.1	1.5	0.0158	0.1285	0.15	2.5	0.0221	0.1376	
0.75	0.1	0.1580	0.0834	0.65	0.7	0.1223	0.1021	0.15	1.5	0.0238	0.1281	0.2	2.5	0.0296	0.1371	
0.00	0.2	0.0000	0.0000	0	0.8	0.0000	0.0000	0.2	1.5	0.0319	0.1275	0.25	2.5	0.0371	0.1365	
0.05	0.2	0.0089	0.1120	0.05	0.8	0.0084	0.1205	0.25	1.5	0.0400	0.1267	0.3	2.5	0.0447	0.1357	
0.10	0.2	0.0179	0.1117	0.1	0.8	0.0168	0.1202	0.3	1.5	0.0482	0.1258	0	2.6	0.0000	0.0000	
0.15	0.2	0.0269	0.1112	0.15	0.8	0.0253	0.1198	0.35	1.5	0.0568	0.1247	0.05	2.6	0.0073	0.1390	
0.20	0.2	0.0361	0.1104	0.2	0.8	0.0339	0.1191	0.4	1.5	0.0654	0.1235	0.1	2.6	0.0146	0.1388	
0.25	0.2	0.0454	0.1095	0.25	0.8	0.0426	0.1183	0.45	1.5	0.0743	0.1220	0.15	2.6	0.0219	0.1384	
0.30	0.2	0.0548	0.1083	0.3	0.8	0.0515	0.1172	0.5	1.5	0.0834	0.1204	0.2	2.6	0.0293	0.1379	
0.35	0.2	0.0645	0.1069	0.35	0.8	0.0605	0.1160	0	1.6	0.0000	0.0000	0.25	2.6	0.0369	0.1373	
0.40	0.2	0.0745	0.1052	0.4	0.8	0.0698	0.1145	0.05	1.6	0.0078	0.1298	0	2.7	0.0000	0.0000	
0.45	0.2	0.0847	0.1033	0.45	0.8	0.0793	0.1129	0.1	1.6	0.0157	0.1295	0.05	2.7	0.0072	0.1398	
0.50	0.2	0.0953	0.1011	0.5	0.8	0.0892	0.1110	0.15	1.6	0.0236	0.1291	0.1	2.7	0.0145	0.1396	
0.55	0.2	0.1063	0.0987	0.55	0.8	0.0993	0.1089	0.2	1.6	0.0316	0.1286	0.15	2.7	0.0218	0.1392	
0.60	0.2	0.1179	0.0959	0.6	0.8	0.1099	0.1065	0.25	1.6	0.0397	0.1278	0.2	2.7	0.0292	0.1388	
0.65	0.2	0.1298	0.0929	0	0.9	0.0000	0.0000	0.3	1.6	0.0480	0.1269	0.25	2.7	0.0366	0.1382	
0.70	0.2	0.1425	0.0894	0.05	0.9	0.0083	0.1218	0.35	1.6	0.0563	0.1259	0	2.8	0.0000	0.0000	
0.75	0.2	0.1558	0.0857	0.1	0.9	0.0167	0.1215	0.4	1.6	0.0649	0.1246	0.05	2.8	0.0072	0.1406	
0.00	0.3	0.0000	0.0000	0.15	0.9	0.0251	0.1211	0.45	1.6	0.0737	0.1232	0.1	2.8	0.0144	0.1404	
0.05	0.3	0.0088	0.1135	0.2	0.9	0.0336	0.1204	0	1.7	0.0000	0.0000	0.15	2.8	0.0217	0.1400	
0.10	0.3	0.0177	0.1132	0.25	0.9	0.0422	0.1196	0.05	1.7	0.0078	0.1308	0.2	2.8	0.0290	0.1396	
0.15	0.3	0.0266	0.1127	0.3	0.9	0.0510	0.1186	0.1	1.7	0.0156	0.1305	0	2.9	0.0000	0.0000	
0.20	0.3	0.0357	0.1120	0.35	0.9	0.0599	0.1174	0.15	1.7	0.0234	0.1302	0.05	2.9	0.0071	0.1413	
0.25	0.3	0.0448	0.1111	0.4	0.9	0.0691	0.1159	0.2	1.7	0.0314	0.1296	0.1	2.9	0.0143	0.1412	
0.30	0.3	0.0542	0.1099	0.45	0.9	0.0785	0.1143	0.25	1.7	0.0394	0.1289	0.15	2.9	0.0215	0.1408	
0.35	0.3	0.0637	0.1085	0.5	0.9	0.0882	0.1125	0.3	1.7	0.0475	0.1280	0.2	2.9	0.0288	0.1404	
0.40	0.3	0.0736	0.1069	0.55	0.9	0.0983	0.1104	0.35	1.7	0.0558	0.1270	0	3	0.0000	0.0000	
0.45	0.3	0.0837	0.1050	0.6	0.9	0.1088	0.1080	0.4	1.7	0.0644	0.1257	0.05	3	0.0071	0.1421	
0.50	0.3	0.0942	0.1029	0	1	0.0000	0.0000	0.45	1.7	0.0731	0.1243	0.1	3	0.0142	0.1419	

(Continued)

(Continued)

$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$	$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$	$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$	$ \Omega $	$K-3$	$g$	$h$
0.55	0.3	0.1051	0.1005	0.05	1	0.0082	0.1230	0	1.8	0.0000	0.0000	0.15	3	0.0214	0.1416
0.60	0.3	0.1164	0.0978	0.1	1	0.0165	0.1227	0.05	1.8	0.0077	0.1318	0.2	3	0.0286	0.1411
0.65	0.3	0.1282	0.0949	0.15	1	0.0248	0.1223	0.1	1.8	0.0154	0.1316	0	3.1	0.0000	0.0000
0.70	0.3	0.1407	0.0915	0.2	1	0.0333	0.1217	0.15	1.8	0.0233	0.1312	0.05	3.1	0.0071	0.1428
0.00	0.4	0.0000	0.0000	0.25	1	0.0419	0.1209	0.2	1.8	0.0311	0.1306	0.1	3.1	0.0141	0.1427
0.05	0.4	0.0087	0.1150	0.3	1	0.0505	0.1199	0.25	1.8	0.0391	0.1299	0.15	3.1	0.0213	0.1423
0.10	0.4	0.0175	0.1147	0.35	1	0.0593	0.1187	0.3	1.8	0.0471	0.1291	0	3.2	0.0000	0.0000
0.15	0.4	0.0264	0.1142	0.4	1	0.0685	0.1173	0.35	1.8	0.0554	0.1280	0.05	3.2	0.0070	0.1436
0.20	0.4	0.0353	0.1135	0.45	1	0.0778	0.1157	0.4	1.8	0.0638	0.1268	0.1	3.2	0.0140	0.1434
0.25	0.4	0.0444	0.1126	0.5	1	0.0874	0.1139	0	1.9	0.0000	0.0000	0.15	3.2	0.0211	0.1431
0.30	0.4	0.0536	0.1115	0.55	1	0.0974	0.1118	0.05	1.9	0.0076	0.1328	0	3.3	0.0000	0.0000
0.35	0.4	0.0630	0.1101	0.6	1	0.1077	0.1095	0.1	1.9	0.0153	0.1325	0.05	3.3	0.0070	0.1443
0.40	0.4	0.0728	0.1085	0	1.1	0.0000	0.0000	0.15	1.9	0.0231	0.1321	0.1	3.3	0.0140	0.1441
0.45	0.4	0.0828	0.1067	0.05	1.1	0.0082	0.1242	0.2	1.9	0.0309	0.1316	0	3.4	0.0000	0.0000
0.50	0.4	0.0931	0.1047	0.1	1.1	0.0164	0.1240	0.25	1.9	0.0388	0.1309	0.05	3.4	0.0069	0.1450
0.55	0.4	0.1039	0.1023	0.15	1.1	0.0247	0.1235	0.3	1.9	0.0468	0.1301	0.1	3.4	0.0139	0.1448
0.60	0.4	0.1150	0.0997	0.2	1.1	0.0330	0.1229	0.35	1.9	0.0550	0.1291	0	3.5	0.0000	0.0000
0.65	0.4	0.1266	0.0968	0.25	1.1	0.0414	0.1221	0.4	1.9	0.0633	0.1279	0.05	3.5	0.0069	0.1457
0.70	0.4	0.1389	0.0935	0.3	1.1	0.0500	0.1211	0	2	0.0000	0.0000	0.1	3.5	0.0138	0.1455
0.00	0.5	0.0000	0.0000	0.35	1.1	0.0588	0.1200	0.05	2	0.0076	0.1337	0	3.6	0.0000	0.0000
0.05	0.5	0.0086	0.1165	0.4	1.1	0.0679	0.1186	0.1	2	0.0152	0.1335	0.05	3.6	0.0069	0.1464
0.10	0.5	0.0173	0.1162	0.45	1.1	0.0770	0.1170	0.15	2	0.0229	0.1331	0	3.7	0.0000	0.0000
0.15	0.5	0.0261	0.1157	0.5	1.1	0.0866	0.1152	0.2	2	0.0306	0.1326	0.05	3.7	0.0068	0.1470
0.20	0.5	0.0349	0.1150	0.55	1.1	0.0964	0.1132	0.25	2	0.0385	0.1319	0	3.8	0.0000	0.0000
0.25	0.5	0.0439	0.1141	0	1.2	0.0000	0.0000	0.3	2	0.0464	0.1311	0	3.9	0.0000	0.0000
0.30	0.5	0.0531	0.1130	0.05	1.2	0.0081	0.1254	0.35	2	0.0545	0.1301	0	4	0.0000	0.0000
0.35	0.5	0.0624	0.1117	0.1	1.2	0.0162	0.1251	0.4	2	0.0628	0.1289				
0.40	0.5	0.0720	0.1101	0.15	1.2	0.0244	0.1247	0	2.1	0.0000	0.0000				
0.45	0.5	0.0819	0.1083	0.2	1.2	0.0327	0.1241	0.05	2.1	0.0075	0.1346				

## Reference

- [1] MATLAB version 9.1.0.441655 (R2016b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2016

# Analytical Evaluation of Uncertainty Propagation for Probabilistic Design Optimisation

Melanie Po-Leen Ooi, Arvind Rajan, Ye Chow Kuang and Serge Demidenko

---

## Appendix B

### Lookup table for the Mellin transforms of various families of probability distribution

This appendix contains the Mellin transforms of commonly used probability distributions. Note that  $\delta, \omega, \omega_1, \omega_2 > 0$  and  $-\infty < v < \infty$ ,  $(a)_n = a(a-1)\dots(a-n+1)$  follow the Pochhammer notation [1],  $a!!$  denotes the double factorial, and  $\mathcal{M}[f_{V^m}^+(v)]$  denotes the Mellin transform of the probability density function  $f_{V^m}^+(v)$ , whereby  $V$  is a random variable with a standard tabulated distribution and  $m$  is an integer. Column one defines the positive half of the PDF  $f_V^+(v)$  of  $V$ , where  $\omega$  and  $\delta$  represent the shape and scale parameters, respectively. Column two lists the corresponding Mellin transform  $\mathcal{M}[f_V^+(v)](s)$  for each distribution  $f_V^+(v)$ . Only one-sided (positive) transforms are listed, because this tabulation enables the flexible evaluation of one-sided, two-sided symmetrical, or two-sided asymmetrical distributions. The appropriate usage will be discussed in the following subsections. Columns three and four list the simplified expressions for the Mellin transform of  $f_V^+(v)$ , denoted by  $M_V^+(s) = \mathcal{M}[f_V^+(v)](s)$ , which is crucial in determining  $E[V^m]$  [2].

Simplified form of $M_V^+(m+1)$ for $m \in \mathbb{Z}^+$	
Distribution	For even $m$
Normal: $f(v) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2\delta^2}}$	$\delta^m \left[ \frac{(m-1)!}{2} \right]$
Student's $t$ : $f(v) = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{2\delta\sqrt{m\pi}\Gamma(\frac{m}{2})} \left( 1 + \frac{1}{\omega} \left( \frac{v}{\delta} \right)^2 \right)^{-\frac{m+1}{2}}$	$\delta^{s-1} \left[ \frac{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{\omega-m}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\omega}{2})} \right]$
Triangular: $f(v) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \left( 1 - \frac{ v }{\delta} \right) & \text{if }  v  \leq \delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\delta^m \left[ \frac{1}{m^2 + 3m + 2} \right]$
Trapezoidal: $f(v) = \begin{cases} \frac{1}{\delta(1+\omega)} & \text{if }  v  \leq \omega \\ \frac{\delta- v }{\delta^2(1-\omega^2)} & \text{if } \omega <  v  \leq \delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\delta^m \left[ \frac{(1-\omega^{m+2})}{(1-\omega^2)} \frac{1}{m^2 + 3m + 2} \right]$
Beta: $f(v) = \frac{1}{2\delta B(\omega_1, \omega_2)} \left( \frac{ v }{\delta} \right)^{\omega_1-1} \left( 1 - \frac{ v }{\delta} \right)^{\omega_2-1}$	$\delta^m \left[ \frac{(\omega_1 + m - 1)_m}{2(\omega_1 + \omega_2 + m - 1)_m} \right]$
Uniform: $f(v) = \frac{1}{2\delta}$	$\delta^m \left[ \frac{1}{m+1} \right]$



$$\text{Gamma: } f(v) = \frac{1}{2\delta\Gamma(\omega)} \left(\frac{v}{\delta}\right)^{\omega-1} e^{-\frac{v}{\delta}} \quad \delta^{s-1} \left[ \frac{\Gamma(\omega-1+s)}{2\Gamma(\omega)} \right] \quad \delta^m \left[ \frac{(\omega+m-1)_m}{2} \right]$$

$$\text{Laplace: } f(v) = \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{v}{\delta}} \quad \delta^{s-1} \left[ \frac{\Gamma(s)}{2} \right] \quad \delta^m \left[ \frac{m!}{2} \right]$$

$$\text{Weibull: } f(v) = \frac{\omega}{\delta} \left(\frac{v}{\delta}\right)^{\omega-1} e^{-\left(\frac{v}{\delta}\right)^\omega} \quad \delta^{s-1} \left[ \frac{\omega}{2} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\omega} + \frac{s}{\omega}\right) \right] \quad \delta^m \left[ \frac{\omega \Gamma\left(\frac{m}{\omega} + 1\right)}{2} \right]$$

$$\text{Maxwell: } f(v) = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{v}{\delta}\right)^2 e^{-\frac{v^2}{2\delta^2}} \quad \delta^{s-1} \left[ \frac{(s+1)}{2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right] \quad \delta^m [(m+1)!]$$

$$\text{Lognormal: } f(v) = \frac{1}{v\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2(v)}{2\delta^2}} \quad \exp\left(\frac{(s-1)^2\delta^2}{2}\right) \quad \exp\left(\frac{m^2\delta^2}{2}\right)$$

## References

- [1] MATLAB version 9.1.0.441655 (R2016b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2016
- [2] Weisstein E W 2002 *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics* (Boca Raton, FL: CRC Press)